introducción

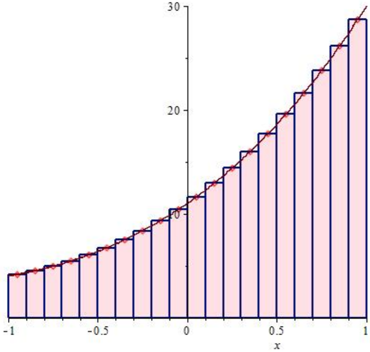
La integral de una función de dos variables $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, llamada integral doble, es una generalización del concepto de integral de Riemann en una variable y se denota por:

$$\int_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dA$$

Comenzamos recordando la definición de integral de una función real de variable real que nos servirá para dar una definición rigurosa de la integral doble.

- Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función real acotada sobre el intervalo $[a, b]$.
- Dividimos el intervalo $[a, b]$ en $n \in \mathbb{N}$ subintervalos $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$.
- En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ elegimos un punto c_i
- calculamos el área del rectángulo de base $(x_i - x_{i-1})$ y altura $f(c_i)$:

$$\Delta_i = f(c_i)\,(x_i - x_{i-1})$$



$$\sum_{i=1}^{20} f(c_i)\,(x_{i+1} - x_i)$$

definición

Si existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,(x_{i+1} - x_i)$$

entonces se dice que f es integrable sobre $[a, b]$ y

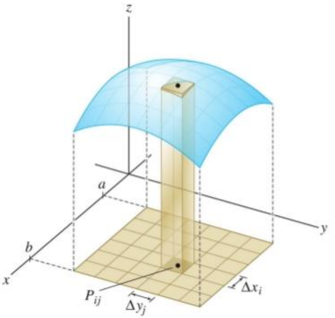
$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,(x_{i+1} - x_i).$$

Generalizamos la idea para el caso de funciones de dos variables definidas y acotadas sobre rectángulos $R = [a, b] \times [c, d]$.

Pasos

Calculamos el volumen del tetraedro de base $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ y altura $f(P_{ij})$,

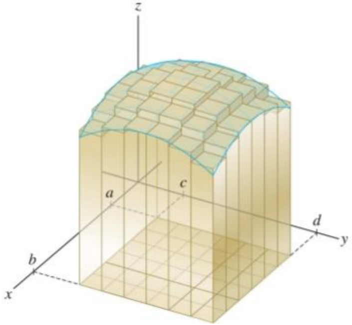
$$\Delta V_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j f(P_{ij})$$



Generalizamos la idea para el caso de funciones de dos variables definidas y acotadas sobre rectángulos $R = [a, b] \times [c, d]$.

Pasos

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(P_{ij})\,\Delta x_i \Delta y_j$$



Definiciones

Definición

Sea f una función acotada sobre $R = [a, b] \times [c, d]$. Si existe el límite,

$$\lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A_{ij},$$

entonces f es *integrable* sobre R y se define la integral doble de f sobre R como

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A_{ij}.$$

Definiciones

Definición

Sea f una función acotada sobre $R = [a, b] \times [c, d]$. Si existe el límite,

$$\lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A_{ij},$$

entonces f es *integrable* sobre R y se define la integral doble de f sobre R como

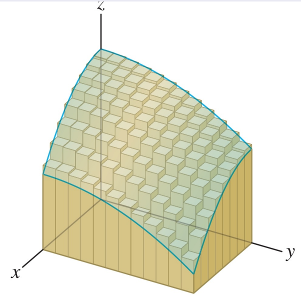
$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A_{ij}.$$

Propiedades

Proposición

Sea f una función definida sobre el rectángulo $\mathrm{R} = [a, b] \times [c, d]$.

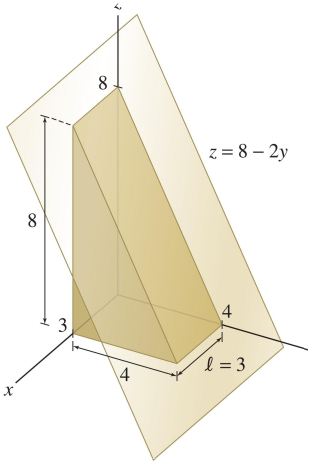
- Si f es continua en $\mathcal{R}$, entonces f es integrable en R



Si f es integrable

- $\displaystyle\iint_{\mathrm{R}} f(x, y)\, dx\, dy$ representa el volumen del sólido entre la gráfica de $f(x, y)$ y la región $\mathcal{D}$ en el plano xy, si $f(x, y) \geq 0$.
- Si $f(x, y) \leq 0$, representa el volumen negativo

Ejemplo



$$\iint_{\mathrm{R}} f(x,y)\,dx\,dy =$$

Volumen del sólido bajo la función continua $f(x,y) = 8 - 2y$ y por encima del rectángulo $\mathrm{R} = [0,3] \times [0,4]$

Proposición

- Si $f = 1$, entonces $\displaystyle\iint_{\mathrm{R}} f(x,y)\,dx\,dy =$ Área R
- Si f y g son integrables sobre R, entonces $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ se cumple $\displaystyle\iint_{\mathrm{R}} [af + bg]\,dx\,dy = a \iint_{\mathrm{R}} f\,dx\,dy + b \iint_{\mathrm{R}} g\,dx\,dy$
- Si f y g son integrables sobre R y $f(x,y) \geq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in R^2$, entonces $\displaystyle\iint_{\mathrm{R}} f\,dx\,dy \geq \iint_{\mathrm{R}} g\,dx\,dy$
- Si f y g son integrables sobre R, entonces fg es integrable. Pero $\displaystyle\iint_{\mathrm{R}} f.g\,dx\,dy \neq \iint_{\mathrm{R}} f\,dx\,dy \iint_{\mathrm{R}} g\,dx\,dy$

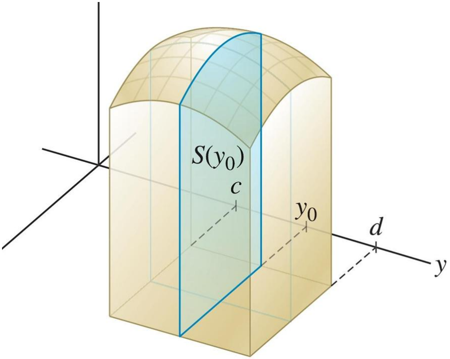
Nosotros nos limitaremos a estudiar las integrales dobles para funciones continuas que, como hemos visto, son siempre integrables sobre $\mathbb{R}$. Nuestro objetivo es encontrar un método que nos ayude a evaluar las integrales sin tener que recurrir a las sumas de Riemann. Las integrales iteradas:

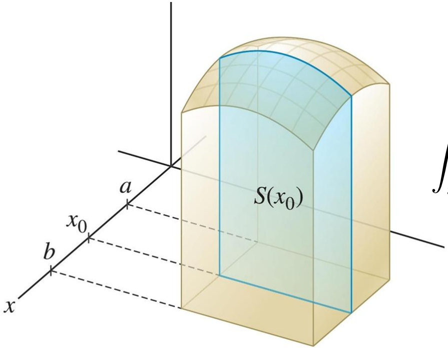
$$\int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=a}^{b} f(x,y)\, dx \right) dy$$

$$\int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)\, dy \right) dx.$$

son muy útiles a la hora de calcular el valor de una integral doble. El siguiente teorema, teorema de Fubini, relaciona las integrales dobles con las integrales iteradas.

$$\int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=a}^{b} f(x,y)\, dx \right) dy$$





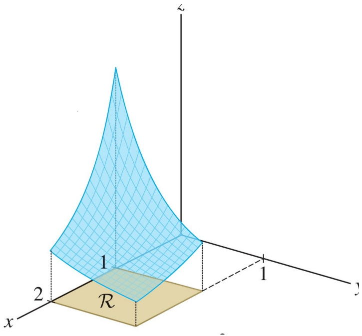
$$\int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)\, dy \right)\, dx$$

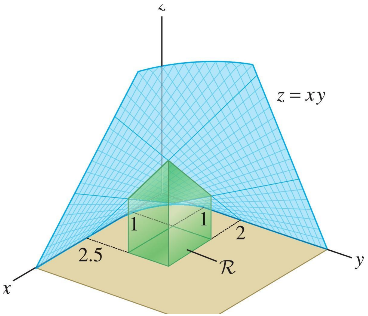
Teorema

Teorema de Fubini para un rectángulo. Sea $f(x,y)$ *una función continua sobre un rectángulo* $\mathrm{R}: \ a \leq x \leq b, \ c \leq y \leq d$. *Entonces se puede calcular la integral doble* $\displaystyle\int\!\!\int_R f(x,y)\,dx\,dy$ *por integración iterada en cualquier orden, es decir:*

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=c}^{d}\left(\int_{x=a}^{b} f(x,y)\,dx\right)\,dy = \int_{x=a}^{b}\left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)\,dy\right)\,dx.}$$

Ejercicios





$$\int\int_{\mathrm{R}} (x+y)^{-2}\, dx\, dy = \ln(4/3)$$

$$\int\int_{\mathrm{R}} xy\, dx\, dy = 63/16$$