Nuestra intención es extender la definición de integral doble, de funciones continuas, sobre regiones D más generales que el rectángulo. Para ello definiremos dos tipos de regiones en el plano, que llamaremos regiones elementales, que vienen determinadas por su forma.

El teorema de Fubini para regiones no rectangulares y el teorema del cambio de variable nos permitirán calcular el valor de integral doble de funciones continuas sobre dichas regiones.

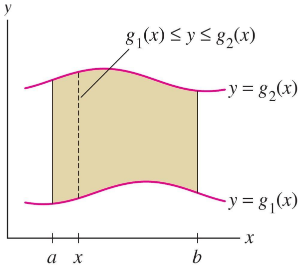
Regiones elementales.

Definición

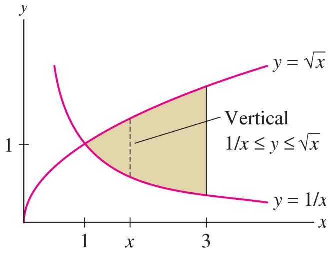
Diremos que una región D es una región elemental de **tipo I** (banda vertical) si contiene los puntos (x, y) tales que para cada x fijo entre las constantes a y b, la coordenada y varía de $g_1(x)$ a $g_2(x)$, donde g_1 y g_2 son funciones continuas.

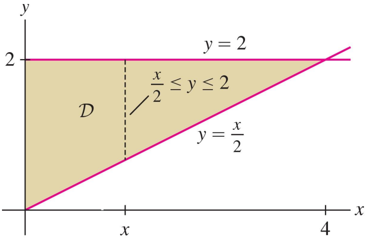
$$a \leq x \leq b$$

$$g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$$



Ejemplo





$$1 \le x \le 3$$
$$1/x \le y \le \sqrt{x}$$

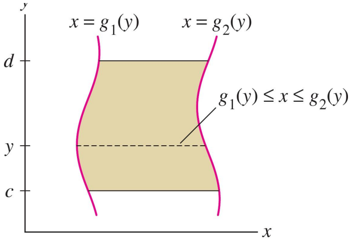
$$0 \le x \le 4$$
$$x/2 \le y \le 2$$

Definición

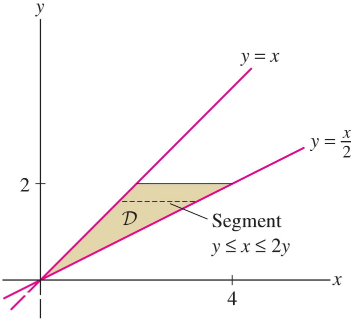
Diremos que una región D es una región elemental de **tipo II** si contiene los puntos (x, y) tales que para cada y fijo entre las constantes c y d, la coordenada x varía de $h_1(y)$ a $h_2(y)$, donde h_1 y h_2 son funciones continuas. (Banda horizontal)

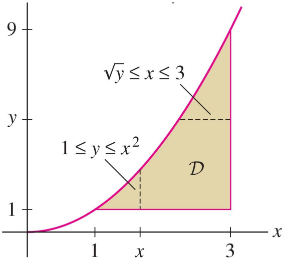
$$c \leq y \leq d$$

$$h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$$



Ejemplo

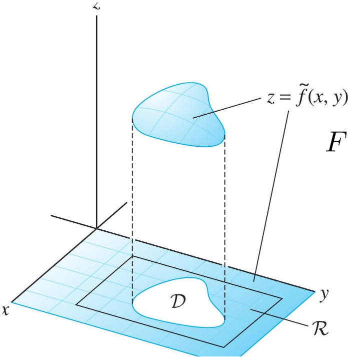




$$0 \leq y \leq 2$$
$$y \leq x \leq 2y$$

$$\begin{cases} 1 \leq y \leq 9 & \text{si } \sqrt{y} \leq x \leq 3 \\ 1 \leq x \leq 3 & \text{si } 1 \leq y \leq x^2 \end{cases}$$

Sea D una región elemental tal que existe un rectángulo R que la contiene, $D \subset \mathrm{R}$, y sea f una función continua definida en D. Construimos la función $F : \mathrm{R} \to \mathbb{R}$ como



$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si}(x,y) \in D \\ 0 & \text{si}(x,y) \in R - D \end{cases}$$

Definición

Si la integral doble de F existe sobre R, entonces definimos la integral doble de f sobre una región elemental D, como

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \iint_{\mathrm{R}} F(x,y)dx\,dy$$

Teorema

Si f es una función continua sobre una región elemental D, entonces f es integrable sobre D

Teorema de Fubini para regiones elementales.

Si D es una región de tipo I y f es una función continua sobre D, entonces

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

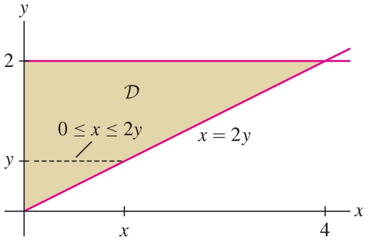
Si D es una región de tipo II y f es una función continua sobre D, entonces

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Ejercicio

Calcula $\displaystyle\iint_D e^{y^2}\,dx\,dy$ donde D es la región delimitada por las rectas $y = 2x$, $y = 2$ y $x = 0$.

$$\int_0^4 \int_{x/2}^2 e^{y^2}\,dx\,dy$$



Proposición

Sea f una función continua sobre D.

- Si $f = 1$, entonces $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy =$ Área D
- $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ es el volumen bajo la gráfica $z = f(x,y)$ y por encima de D, si $f(x,y) \geq 0$ para todo $(x,y) \in R$.
- *Regla de subdivisión:* Si la región de integración D se puede dividir en dos subregiones D_1 y D_2 entonces $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Proposición

Sean f y g funciones continuas sobre D.

- *Regla de linealidad:* Si a y b son constantes,

$$\iint_D [a\, f(x,y) + b\, g(x,y)]\, dx\, dy = a \iint_D f(x,y)\, dx\, dy + b \iint_D g(x,y)\, dx\, dy.$$

Teorema del cambio de variable

Sean $D, D^* \subset \mathbb{R}^2$ y $T : D^* \longrightarrow D$ la aplicación biyectiva dada por $T(u,v) = (x,y)$. Supongamos que x e y admiten derivadas parciales continuas respecto a u y v en D^*. Entonces si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua se tiene que

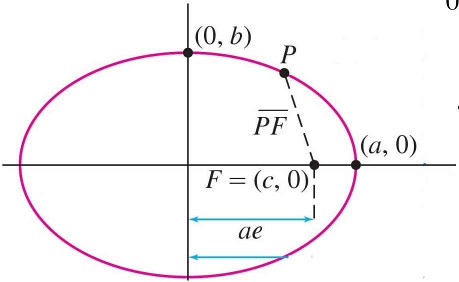
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v))\, |J|\, du\, dv$$

donde J

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Halla el area de la elipse centrada en el origen $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$



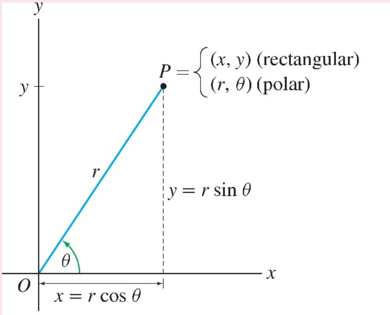
$$x = a\,r\cos\theta$$
$$y = b\,r\sin\theta$$
$$0 \le r \le 1;\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{pmatrix} = abr$$

$$\int_{-a}^{a} \int_{-b/a\sqrt{a^2-x^2}}^{b/a\sqrt{a^2-x^2}} dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{2\pi} abr\,d\theta\,dr = \pi ab$$

El cambio de variables que más vamos a utilizar es el cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas polares.



Coordenadas polares

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

$\Longleftrightarrow$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arctan\left(y/x\right)$$

La ecuación cartesiana de la circunferencia de centro $(a, 0)$ y radio a es

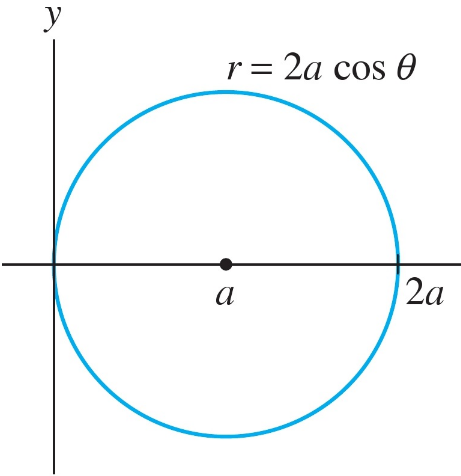
$$(x-a)^2 + y^2 = a^2.$$

Y su ecuación en polares es

$$(r\cos\theta - a)^2 + (r\sin\theta)^2$$

$$r^2 - 2ra\cos\theta + a^2 = a^2$$

$$\Longrightarrow r = 2a\cos\theta$$



Teniendo en cuenta que el

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r} & \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial \theta} \\ \\ \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r} & \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial \theta} \end{pmatrix} =$$

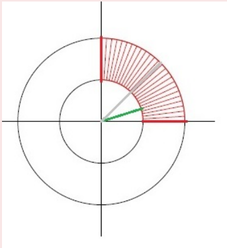
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

se tiene que

Proposición

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_{D^*} f(x(\rho,\theta),y(\rho,\theta))\,r\,d\theta\,d\rho$$

Ejemplo



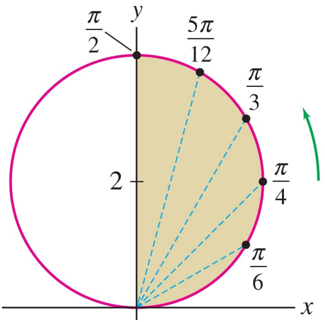
Hallar la integral $\iint_D (1+xy)\,dx\,dy$ siendo D la región del primer cuadrante limitada por las curvas $y^2+x^2=4$, $y^2+x^2=1$.

$$\int\int_D (1+xy)\,dx\,dy = \int_1^2 \int_0^{\pi/2} \rho\left(1+\rho^2\cos\theta\sin\theta\right)\,d\theta\,d\rho$$

$$= \int_1^2 \rho\left(\theta+\rho^2\sin^2\theta/2\right)_0^{\pi/2}\,d\rho = \int_1^2 \rho\pi/2+\rho^2/2\,d\rho = 3\pi/4+7/6$$

Ejercicio

Calcular $\displaystyle\int\int_D (x^2+y^2)^{-2}\, dx\, dy =$ donde D es el dominio de la siguiente figura



Ejemplo

Halla el area de la región I dentro de la circunferencia $(x-1)^2+y^2=1$ pero fuera de la circunferencia $x^2+y^2=1$